10/3/2017

▸ Έστω $\mathcal{R}$ μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου $X \neq \phi$.
Θεωρούμε το σύνολο πηλίκο $X|\mathcal{R} = \{ [x]_{\mathcal{R}} \subseteq X \mid x \in X \}$
Τότε η απεικόνιση $\varpi : X \to X|\mathcal{R}$, $x \longrightarrow \varpi(x) \overset{\text{ορ.}}{=} [x]_{\mathcal{R}}$
είναι επί, η οποία καλείται απεικόνιση προβολής του X επί του συνόλου πηλίκο $X|\mathcal{R}$

▸ Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση μεταξύ των συνόλων X και Y
Ορίζουμε μια σχέση $\mathcal{R}_f$ επί του X ως εξής:
$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \sim_{\mathcal{R}_f} x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Η σχέση $\mathcal{R}_f$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του X :
- $\forall x \in X : x \sim_{\mathcal{R}_f} x$ διότι $f(x) = f(x)$
- $\forall x_1, x_2 \in X$ και $x_1 \sim_{\mathcal{R}_f} x_2$ τότε : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$
$\Rightarrow x_2 \sim_{\mathcal{R}_f} x_1$

• $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$ και έστω $\left. \begin{array}{l} x_1 \sim_{R_f} x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2) \\ x_2 \sim_{R_f} x_3 \Rightarrow f(x_2)=f(x_3) \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_3) \Rightarrow x_1 \sim_{R_f} x_3$

$\forall x \in X: [x]_{R_f} = \{x' \in X \mid x' \sim_{R_f} x\} = \{x' \in X \mid f(x') = f(x)\} =$

$= \{x' \in X \mid x' \in f^{-1}(\{f(x)\})\} = f^{-1}(\{f(x)\})$

Έτσι θα έχουμε απεικόνιση επί $\vartheta : X \to X / R_f$

$\vartheta(x) = [x]_{R_f}$.

$i : Im(f) \to Y$

$y \mapsto i(y) = y$ απεικόνιση έγκλεισης η οποία είναι "1-1"

Ορίζουμε απεικόνιση $\bar{f} : X/R_f \to Im(f)$

$\bar{f}([x]_{R_f}) = f(x)$

Έστω ότι $[x]_{R_f} = [x']_{R_f} \Rightarrow x \sim_{R_f} x' \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{f}([x]_{R_f}) = \bar{f}([x']_{R_f})$

Άρα η $\bar{f}$ καλά ορισμένη.

$\bar{f}([x]_{R_f}) = \bar{f}([x']_{R_f}) \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x \sim_{R_f} x' \Rightarrow$

$\Rightarrow [x]_{R_f} = [x']_{R_f} \Rightarrow$ η $\bar{f}$ είναι "1-1"

Έστω ότι $y \in Im(f) \subseteq Y \Rightarrow \exists x \in X : f(x) = y$.

Τότε $\bar{f}([x]_{R_f}) = f(x) = y \Rightarrow$ η $\bar{f}$ είναι επί

Η $\bar{f}$ είναι 1-1 και επί

Τότε $\forall x \in X: (i \circ \bar{\varphi} \circ \omega)(x) = i(\bar{\varphi}(\omega(x))) = i(\bar{\varphi}([x]_{R_\varphi})) = i(\varphi(x))$
$= \varphi(x))$

Άρα $\varphi = i \circ \bar{\varphi} \circ \omega$

Παράδειγμα: Έστω $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Θεωρούμε απεικόνιση $\varphi: X \to Y$ ως εξής

x	1	2	3	4	5
$\varphi(x)$	5	2	1	2	5

Τότε $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 \sim_{R} x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

Τότε π.χ. $[1]_{R_\varphi} = \{1, 5\}$

$[2]_{R_\varphi} = \{2, 4\}$

$[3]_{R_\varphi} = \{3\}$

$[4]_{R_\varphi} = \{2, 4\}$

$[5]_{R_\varphi} = \{1, 5\}$

Τότε $X \setminus R_\varphi = \{[1]_{R_\varphi}, [2]_{R_\varphi}, [3]_{R_\varphi}\}$

$= \{\{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3\}\}$

Απεικόνιση προβολής $\pi: X \to X \setminus R_\varphi$, $\pi = \begin{cases} 1 \mapsto [1]_{R_\varphi} \\ 2 \mapsto [2]_{R_\varphi} \\ 3 \mapsto [3]_{R_\varphi} \\ 4 \mapsto [2]_{R_\varphi} \\ 5 \mapsto [1]_{R_\varphi} \end{cases}$

$Im(\varphi) = \{1, 2, 5\}$

$i : Im(\varphi) \to Y$, $\quad i : \begin{cases} 1 \to 1 \\ 2 \to 2 \\ 5 \to 5 \end{cases}$

Τότε $\quad \bar{\varphi} : X / R_\varphi \to Im(\varphi)$, $\quad \bar{\varphi} \begin{cases} [1]_{R_\varphi} \longmapsto 5 \\ [2]_{R_\varphi} \longmapsto 2 \\ [3]_{R_\varphi} \longmapsto 1 \end{cases}$

Τότε $\quad \varphi = i \circ \bar{\varphi} \circ \pi$

i: 1-1

$\bar{\varphi}$: 1-1 και επι

π: επι

Έστω $\{R_i\}_{i \in I}$ μια συλλογή σχέσεων ισοδυναμίας επι ενός συνόλου X

Θέλω να εξετάσω αν είναι η τομή $\bigcap_{i \in I} R_i$ και η ένωση ~~σχέσεων~~ $\bigcup_{i \in I} R_i$ σχέσεις ισοδυναμίας επί του X

Παράδειγμα: $X = \{1,2,3,4,5\}$

$$\left.\begin{array}{l} R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1)\} \\ R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(2,3),(3,2)\} \end{array}\right\} \text{σχέσεις ισοδυναμίας επί του } X$$

Όμως η $R = R_1 \cup R_2$ δεν είναι σχέση ισοδυναμίας

αφού $\left.\begin{array}{l}(1,2) \in R_1 \cup R_2 \\ (2,3) \in R_1 \cup R_2\end{array}\right\}$ όμως $(1,3) \notin R_1 \cup R_2 \Rightarrow R$ όχι σχέση ισοδυναμίας, αφού δεν ικανοποιεί τη μεταβατική ιδιότητα

Άρα, η ένωση σχέσεων ισοδυναμίας δεν είναι πάντα μια σχέση ισοδυναμίας.

Λήμμα: Αν $\{R_i\}_{i\in I}$ είναι μια συλλογή σχέσεων ισοδυναμίας επί ενός συνόλου. Τότε η τομή $\bigcap_{i\in I} R_i$ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του X.

Απόδειξη: • $\forall x \in X$ $(x,x) \in R_i$, $\forall i \in I$ διότι

R_i σχέση ισοδυναμίας επί του X. Άρα $(x,x) \in \bigcap_{i \in I} R_i$, $\forall x \in X$

• $\forall x,y \in X$ και έστω $(x,y) \in \bigcap_{i \in I} R_i$

$\Rightarrow (x,y) \in R_i \Rightarrow (y,x) \in R_i, \forall i \in I \Rightarrow (y,x) \in \bigcap_{i \in I} R_i$

• $\forall x,y,z \in X$ έστω

$$\left.\begin{array}{l} (x,y) \in \bigcap_{i \in I} R_i \Rightarrow (x,y) \in R_i \\ (y,z) \in \bigcap_{i \in I} R_i \Rightarrow (y,z) \in R_i \end{array}\right\} \Rightarrow (x,z) \in R_i$$

$\Rightarrow (x,z) \in \bigcap_{i \in I} R_i$. Άρα τελικά $\bigcap_{i \in I} R_i$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Πρόταση: Έστω X τυχόν σύνολο και $S \subseteq X \times X$

Τότε $\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{S \subseteq R \\ R:\text{ σχέση ισοδυναμίας}}} R$: σχέση ισοδυναμίας επί του X και μάλιστα είναι η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας επί του X η οποία περιέχει το S

Απόδειξη: Η σχέση ισοδυναμίας $X \times X$ επί του X περιέχει το S και άρα η συλλογή όλων των σχέσεων ισοδυναμίας επί του X πού περιέχουν το S είναι μη-κενή.

Από το λήμμα έπεται ότι $\langle S \rangle = \bigcap \mathcal{R}$ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του X η οποία περιέχει το S, διότι $S \subseteq \mathcal{R}$

Για να δείξουμε ότι η $\langle S \rangle$ είναι η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας που περιέχει το S, πρέπει να δείξουμε ότι αν T είναι σχέση ισοδυναμίας επί του X με $S \subseteq T$ τότε $\langle S \rangle \subseteq T$. Αυτό όμως συμβαίνει διότι η T είναι στοιχείο της συλλογής

Ορισμός: Η σχέση ισοδυναμίας $\langle S \rangle$ καλείται η σχέση ισοδυναμίας επί του X η οποία παράγεται από το $S \subseteq X \times X$

Παράδειγμα: $X=\{1,2,3,4,5\}$ και $S=\{(1,3),(2,5),(3,4)\} \subseteq X \times X$

$\langle S \rangle = ;$

Λύση: Θα έχουμε $\langle S \rangle = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(3,1),(1,3),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3),(1,4),(4,1)\}$

• <u>Πράξεις</u>

Ορισμός: Μια πράξη $\to$ διμελής επι ενος μη-κενού συνόλου X είναι μια απεικόνιση $\mu : X \times X \to X$, $(x,y) \mapsto \mu(x,y)$

Παράδειγμα: $X=\mathbb{N}$ και μ: πρόσθεση στο $\mathbb{N}$: $\mu(x,y)=x+y$

Η μ είναι μια διμελής πράξη επι του $\mathbb{N}$

Είναι η απεικόνιση $\mu(x,y)=x-y$ μια διμελής πράξη επι το $\mathbb{N}$;

Οχι μιας και δεν είναι η μ μια απεικόνιση $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

(2) $X=\mathbb{R}$, $\mu(x,y)=x\cdot y$ μια διμελής πράξη στο $\mathbb{R}$

Όμως η $\mu(x,y)=\frac{x}{y}$ δεν είναι διμελής πράξη στο $\mathbb{R}$

Όμως αν $\mu: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ με $\mu(x,y)=\frac{x}{y}$ τότε είναι μια διμελής.

Συμβολισμός: Από τώρα και στο εξής μια πράξη επί ενός συνόλου X θα συμβολίζεται με: $*: X\times X \to X$

$(x,y) \longmapsto x*y$

Πόσες δυνατές πράξεις ορίζονται επί ενός συνόλου X με $|X|=n$;

(1) $|X|=1$, δηλαδή $X=\{x\}$. Τότε η μόνη δυνατή πράξη επί του X είναι η εξής

$*: X\times X \to X$, $(x,x) \longmapsto x*x=x$

$\{x\}$ $\{x\}$ $\{x\}$

Γενικά αν X, Y πεπερασμένα σύνολα και έστω $|X|=n$, $|Y|=m$ Τότε το πλήθος όλων των απεικονίσεων $f: X\to Y$ είναι ίσο με $|Y|^{|X|}$

(2) 16 όταν $|X|=2$.

Άρα το πλήθος των πράξεων επί του X $|X|=n$ είναι $|X|^{|X\times X|}=n^{n^2}$

Άσκηση: Να περιγραφούν οι 16 πράξεις που ορίζονται σε ένα σύνολο $X = \{x, y\}$

Παράδειγμα: (1) $\mathbb{K} = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Στο $\mathbb{K}$ ορίζονται οι συνήθεις πράξεις πρόσθεσης $(+)$ και πολλαπλασιασμού $(\cdot)$

(2) Έστω $M_{n \times m}(\mathbb{K})$ το σύνολο όλων των $n \times m$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{K}$

Ορίζεται η πράξη της πρόσθεσης πινάκων $(A, B) \longmapsto A + B$

Όταν $n = m$ τότε στο σύνολο $M_{n \times m}$ ορίζεται η πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων $(A, B) \longmapsto A \cdot B$

(3) Έστω X σύνολο και $M(X) = \{ \varphi : X \to X \,/\, \varphi \text{ απεικόνιση} \}$

Στο σύνολο $M(X)$ ορίζεται η πράξη $(\circ)$ της σύνθεσης απεικονίσεων.

$\circ : M(X) \times M(X) \to M(X), \; (\varphi, g) \longmapsto \varphi \circ g$

→ σύνολο όλων των μεταθέσεων

(4) Έστω X σύνολο και $S(X) = \{\varphi : X \to X \mid \varphi : 1\text{-}1 \text{ και επί}\}$

Στο σύνολο $S(X)$ ορίζεται η πράξη της σύνθεσης $(\circ)$ απεικονίσεων $\circ : S(X) \times S(X) \to S(X)$, $(\varphi, g) \mapsto \varphi \circ g$

Μετάθεση του X καλείται κάθε 1-1 και επί απεικόνιση $\varphi : X \to X$

Πόσα στοιχεία έχει το $M(X)$; $S(X)$; όταν $|X| = n$

$|M(X)| = n^n$ και $|S(X)| = n!$

Παράδειγμα: Έστω $A = \{\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \varphi : \text{συνάρτηση}\}$

A: σύνολο αριθμητικών συναρτήσεων

Στο A ορίζεται η πράξη ενελικτικού γινομένου $*$ (γινόμενο Dirichlet)

$*: A \times A \to A \quad (\varphi, g) \mapsto \varphi * g$

$$(\varphi * g)(n) = \sum_{d \mid n} \varphi(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d \mid n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) \cdot g(d)$$

$$= \sum_{c \cdot d = n} \varphi(c) \cdot g(d)$$

Αν $*$ μια πράξη επί του X. Αν πάρουμε τα στοιχεία $a, b, c, d \in X$ τότε $a * b * c * d$ έχει νόημα αυτή η γραφή;

Δεν έχει νόημα αυτή η γραφή αφού δεν είναι μοναδική η ερμηνεία της μιας και

$((a*b)*c)*d$, $(a \times (b*c))*d$, $a \times ((b*c)*d)$, $a*(b*(c*d))$, $(a*b)*(c*d)$

Ορισμός: Μια πράξη $*$ επί ενός μη-κενού συνόλου X καλείται προσεταιριστική αν-ν για κάθε $a, b, c \in X$: $a*(b*c) = (a*b)*c$

Μια ημι-ομάδα είναι ένα ζεύγος $(X, *)$ όπου το X είναι σύνολο και $*$ είναι μια προσεταιριστική πράξη ορισμένη επί του X